1 Kurvendiskussion

Unter Kurvendiskussion versteht man das Untersuchen der Eigenschaften von Funktionen. Im Folgenden möchten wir Polynome untersuchen. Polynome lassen sich schreiben als

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i = a_1 x^n + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Die Zahl n, die den höchsten Exponenten der Zahlen angibt, wollen wir *Grad* nennen, die Zahlen $a_1 \ldots a_n$ nennen wir Koeffizienten. x nennen wir das *Argument*.

Gegeben sei also folgende zu untersuchende Funktion:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

1.1 Symmetrie

Unter Symmetrie verstehen wir zwei Arten von Symmetrie:

1. Achsensymmetrie
2. Punktsymmetrie

Achsensymmetrie liegt dann vor, wenn gilt

$$f(x) = f(-x)$$

Wir überprüfen dies, indem wir $-x$ einsetzen:

$$f(-x) = (-x)^3 - 4(-x)^2 + (-x) + 6 = -x^3 - 4x^2 - x + 6$$

Wie wir sehen, ist dies *ungleich* der ursprünglichen Funktion, es liegt also keine Achsensymmetrie vor.

Punktsymmetrie liegt dann vor, wenn gilt

$$f(x) = -f(-x)$$

Wir achten besonders auf das Minuszeichen und setzen wieder ein:

$$-f(-x) = -[(-x)^3 - 4(-x)^2 + (-x) + 6] = -(-x^3 - 4x^2 - x + 6) = x^3 + 4x^2 + x - 6$$

Auch dies ist ungleich der gegebenen Funktion, somit liegt auch keine Punktsymmetrie vor.

1.2 Achsenabschnitt

y-Achsenabschnitt nennen wir den Funktionswert, mit dem die y-Achse geschnitten wird. Der y-Achsenabschnitt ist der Wert y_1 an dem gilt:

$$y_1 = f(0)$$

Das errechnen dieses Wertes setzt keinerlei geistige Anstrengung voraus, wir erhalten ihn durch stupides einsetzen:

$$f(0) = 0^3 - 4 * 0^3 + 0 + 6 = 6$$

Er ist bei Polynomen immer gleich dem konstanten Teil, da alle Terme, in denen x vorkommt wegfallen. Fehlt auch der konstante Teil, so ist dieser Abschnitt gleich 0.

Nullstellen Unter den Nullstellen, im Folgenden mit $x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}$ bezeichnet, verstehen wir die Stellen, an denen die Funktion die x-Achse schneidet, ihr Wert also 0 ist:

$$f(x_0) = 0$$

Wir können diese Werte wie folgt bestimmen:

- Äquivalenzumformung z.B. bei Geraden der Form $f(x) = ax + b = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{a}$
- pq-Formel bei quadratischen Gleichungen der Form

$$f(x) = x^2 + px + q = 0 \Rightarrow x_{01,02} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

- durch Polynom-Division und Rückführung auf quadratische Funktionen

Nicht jede Funktion hat eine Nullstelle (zumindest im Reellen, womit man sich in der Schule beschäftigt). So hat $f(x) = x^2 + 1$ keine Nullstelle, ihr Graph verläuft oberhalb der x-Achse. Andere Funktionen haben dafür aber unendliche viele Nullstellen, z.B. der Sinus.

Aber zurück zu unserer Funktion. Die Sache mit der Polynomdivision läuft wie folgt: Zuerst raten wir eine Nullstelle. Dies ist bei den Schulbuchaufgaben in der Regel problemlos möglich, da sie ganzzahlig sind und nach dem Satz von Viëta gilt:
Die ganzzahligen Nullstellen sind Teiler des konstanten Gliedes
Teiler des Gliedes 6 der gegebenen Funktion sind $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Wir probieren die 2 aus:

$$f(2) = 2^3 - 4 * 2^2 + 2 + 6 = 8 - 16 + 2 + 6 = 0$$

Also ist $x_{01} = 2$ eine Nullstelle. Wir führen die Polynomdivision durch $(x - \text{Nullstelle})$ aus:

$$(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2) = x^2 - 2x - 3$$

Dies *quadratische* Funktion setzen wir gleich 0 und erhalten über die pq-Formel:

$$(x_{01,02} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2^2}{4} + 3} \Rightarrow x_{02} = 3, x_{03} = -1$$

Das stimmt mit den ermittelten Teilern überein.

Tipps zu Nullstellen Wenn der Grad größer wird, gibt es keine Formel mehr und das Raten wird schwierig. Wenn es kein konstantes Glied gibt, können wir direkt durch x teilen, solange bis es eines gibt ($0/x^n = 0$). Wie wir oben gesehen haben, hatten wir die Nullstellen alle schon einmal geraten, und es gilt der (modifizierte) Fundamentalsatz der Algebra:
[1]

Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen

Wenn die erratenen Nullstellen passen, können wir uns den Rest natürlich schenken. Leider können es aber auch weniger Nullstellen oder gebrochene Zahlen sein, dann müssen wir da halt durch.

1.3 Verhalten an den Rändern

Unsere Polynome sind über ganz $\mathbb{R}$ definiert. Damit ist das Randwertverhalten für $\pm\infty$ zu untersuchen:

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 - 4x^2 + x + 6) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 4x^2 + x + 6) = -\infty$$

- Polynome ungeraden Gerades streben am linken Rand gegen $-\infty$, am Rechten gegen $+\infty$.
- Polynome geraden Gerades streben am linken Rand gegen $+\infty$, am Rechten auch gegen $+\infty$.
- Ist der Koeffizienten des höchsten Gliedes negativ, kehren sich die Vorzeichen um!

1.4 Extremwerte

Eine Extremstelle x_{01} liegt dann vor, wenn in einer passen gewählten Umgebung gilt:

$$f(x) \geq f(x_{01}) \text{ bzw. } f(x) \leq f(x_{01})$$

Im ersten Fall nennen wir diese Extremstelle Minimum (Talsohle), in der anderen Maximum (Gipfel). An diesen Stellen verläuft die Tangente waagerecht. Um die Steigung der Tangente zu bestimmen, bedienen wir uns bekanntlich der Ableitung.

Notwendige Bedingung für Extremwerte es ist notwendig, dass an der Extremstelle x_{0n} gilt:

$$f'(x_{1n}) = 0$$

Wir stellen das fest, indem wir nach den bekannten Regeln ableiten:

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 1$$

[1]Eigentlich lautet er: *Ein Polynom vom Grad n besitzt n (ggf. vielfache) Nullstellen im Komplexen.* Mit komplexen Zahlen lassen sich Zahlen wie $1 + \sqrt{-3}$ darstellen, so dass die pq-Formel immer lösbar wird. Vielfach heißt eine Nullstelle wie 2 z.B. in $(x-2)(x-2) = x^2 - 4x + 4$, da sie mehrfach vorkommt.

Wir erhalten eine quadratische Funktion, deren Nullstellen wir mit der pq-Formel finden. Diese sind $x_{11,12} = \frac{4}{3} \pm \frac{13}{3} = 2,53518$ bzw. $0,131483$. Wir müssen nun noch unterscheiden ob ein Minimum, ein Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt, der gar kein Extemwert ist.

Hinreichende Bedingung für Extremwerte Es ist hinreichend (d. h. es ist auf jeden Fall so), dass ein Extremwert an x_{0n} vorliegt, wenn gilt

$$f'(x_{0n}) = 0 \wedge f''(x_{0n}) \neq 0$$

Für den Fall, dass $f''(x_{0n}) \geq 0$ ist, liegt ein Minimum vor, wenn $f''(x_{0n}) \leq 0$ ist, liegt ein Maximum vor. Wir bilden also zuerst die Ableitung und setzen dann ein:

$f''(x) = 6x-8 \Rightarrow f''(2,53518) = 7,21107 \Rightarrow$ Minimum; $f(0,131483) = -7.21110 \Rightarrow$ Maximum

Wertetabelle Wir erstellen eine Wertetabelle, indem wir verschieden Werte des Bereichs errechnen und in eine Tabelle x|y eintragen

Graph Unter besonderer Berücksichtigung der ermittelten Hoch- und Tiefpunkte sowie des Randwertverhalten zeichnen wir den Graphen der Funktion. Dabei wählen wir den Bereich so, dass alle ermittelten Punkte möglichst noch zu sehen sind. Insbesondere dürfen die Achsenbezeichnungen x und $f(x)$ nicht fehlen.